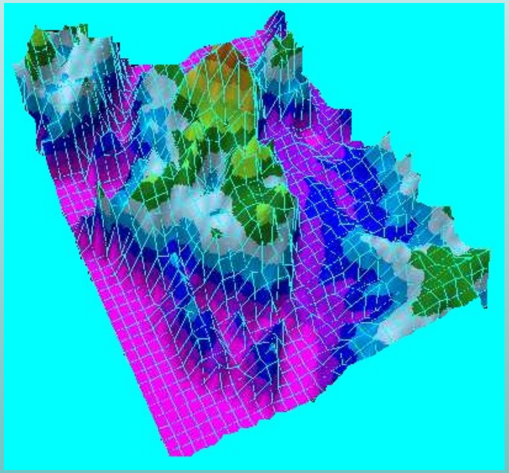
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

GEOESTADÍSTICA APLICADA

Tema:

Geoestadística Fractal



Instructores:

Dr. Martín A. Díaz Viera (*mdiazv@imp.mx*)

Dr. Ricardo Casar González (*rcasar@imp.mx*)

2020

Contenido

- **Introducción**
- **Ejemplos de objetos de la naturaleza con propiedades Fractales**
- **Definición de Fractal**
- **Diferencia entre geometría euclidiana y fractal**
- **Fractales Determinísticos**
- **Fractales Aleatorios**
- **Ruido Gaussiano Fraccional (fGn)**
- **Movimiento Browniano Fraccional (fBm)**
- **Co-dimensión Fractal o Exponente de Intermitencia**
- **Modelos de variogramas para fGn y fBm**
- **Análisis espacial para una distribución fractal**
- **Métodos de Estimación del Exponente de Intermitencia H**
- **Simulación Condicional Fractal**

Introducción

- Los ***fractales*** son formas geométricas que no pueden ser descritas con la geometría euclidiana convencional.
- La ***geometría fractal*** es una rama de las matemáticas que estudia los objetos que poseen una dimensión no entera y que presentan propiedades de escala muy particulares.

Introducción

- La teoría fractal ha encontrado aplicación en diversos campos de la ciencia y la tecnología, incluyendo en particular la descripción y la ingeniería de yacimientos.
- Los fractales proporcionan un modelo matemático alternativo para la distribución de las propiedades de rocas con lo cual es posible generar distribuciones que tienen cierta heterogeneidad y cierto orden a la vez.

Ejemplos de objetos de la naturaleza con propiedades Fractales

ramas de los árboles

hojas de las plantas

montañas

patrones de fracturamiento

Definición de Fractal

Un fractal es por definición un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede la dimensión topológica

Benoit Mandelbrot

Mandelbrot fue quien acuñó la palabra "fractal" a partir del latín "fractus" o "frangere": romper en fragmentos irregulares.

Diferencia entre geometría euclidiana y fractal

- Considérese una recta que se divide en 3 segmentos iguales, usando una relación de similitud ***r*** igual a 1/3.

- Se cumple la siguiente relación: $3\left(1/3\right)^{1} = 1$

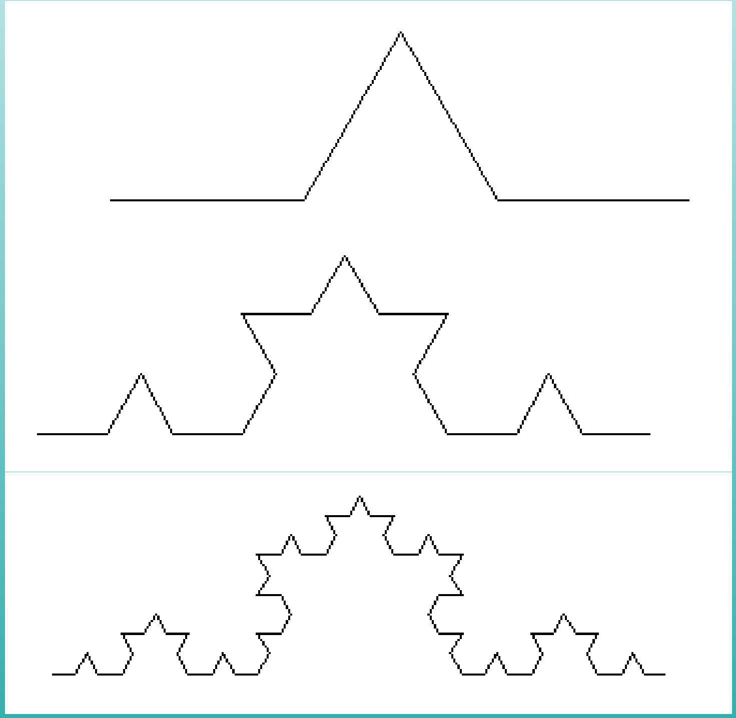
- En general se cumple la siguiente ecuación:

$$Nr^{d} = 1$$

- donde ***N*** es el número de segmentos, ***r*** es el radio de similitud y ***d*** es la dimensión euclidiana

Diferencia entre geometría euclidiana y fractal

- La curva de Koch, es una recta que se divide en 4 segmentos, que su vez pueden dividirse siempre en 4 segmentos y así sucesivamente, esto crea una figura en que cada parte es siempre similar con la figura total.
- Al aplicar la ecuación anterior: $\boldsymbol{N} = 4$, $\boldsymbol{r} = 1/3$ y
- $\boldsymbol{D} = 1.2618$ (dimensión no entera)



curva de Koch

Fractales Determinísticos

El ejemplo descrito se conoce como un ***conjunto fractal determinístico***, en donde cada parte de la figura es exactamente similar al conjunto total.

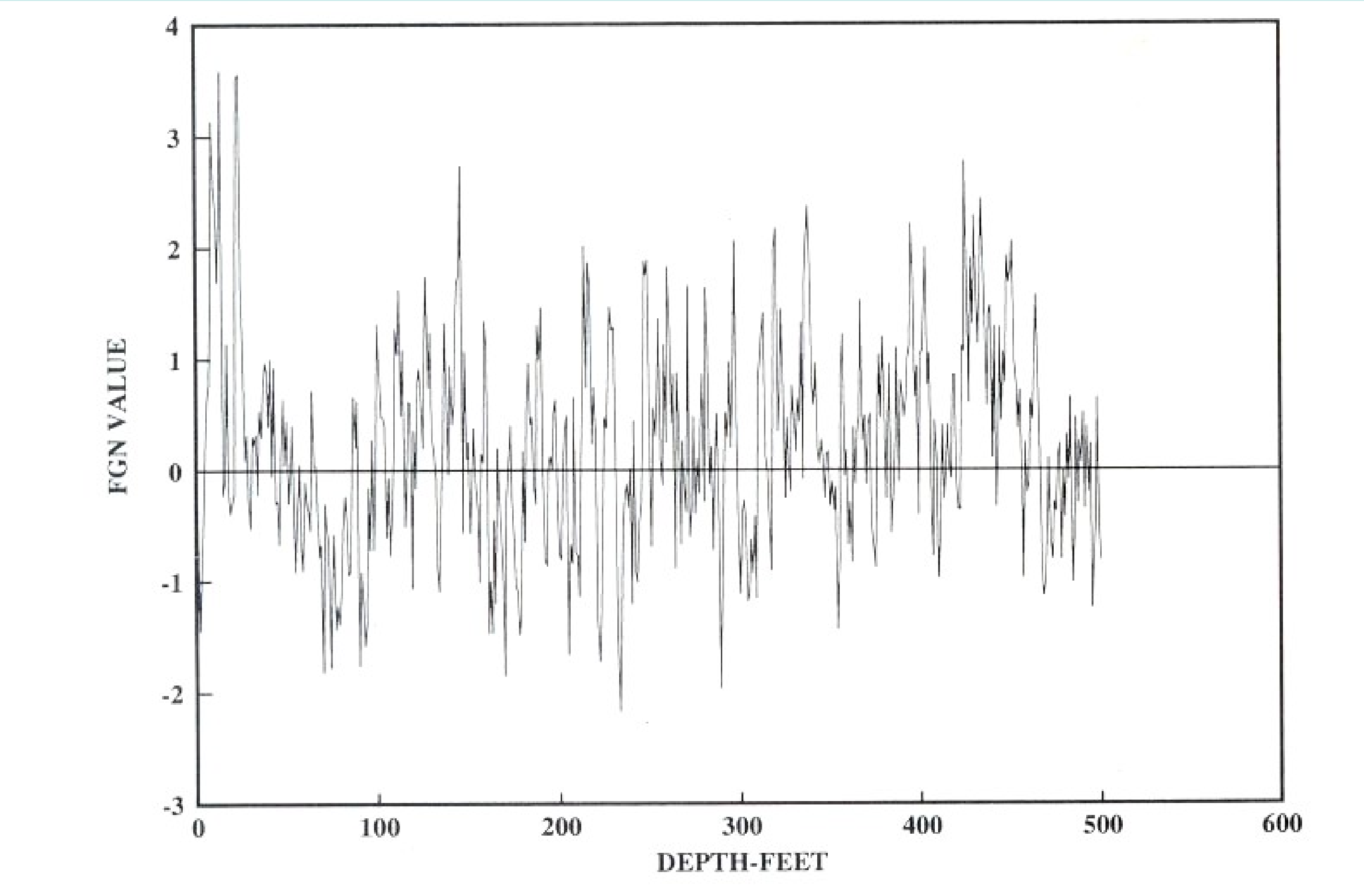
Tales fractales no tienen una aplicación directa a la descripción de fenómenos geológicos, para estos casos se requiere de la aplicación de los ***fractales aleatorios***.

Fractales Aleatorios

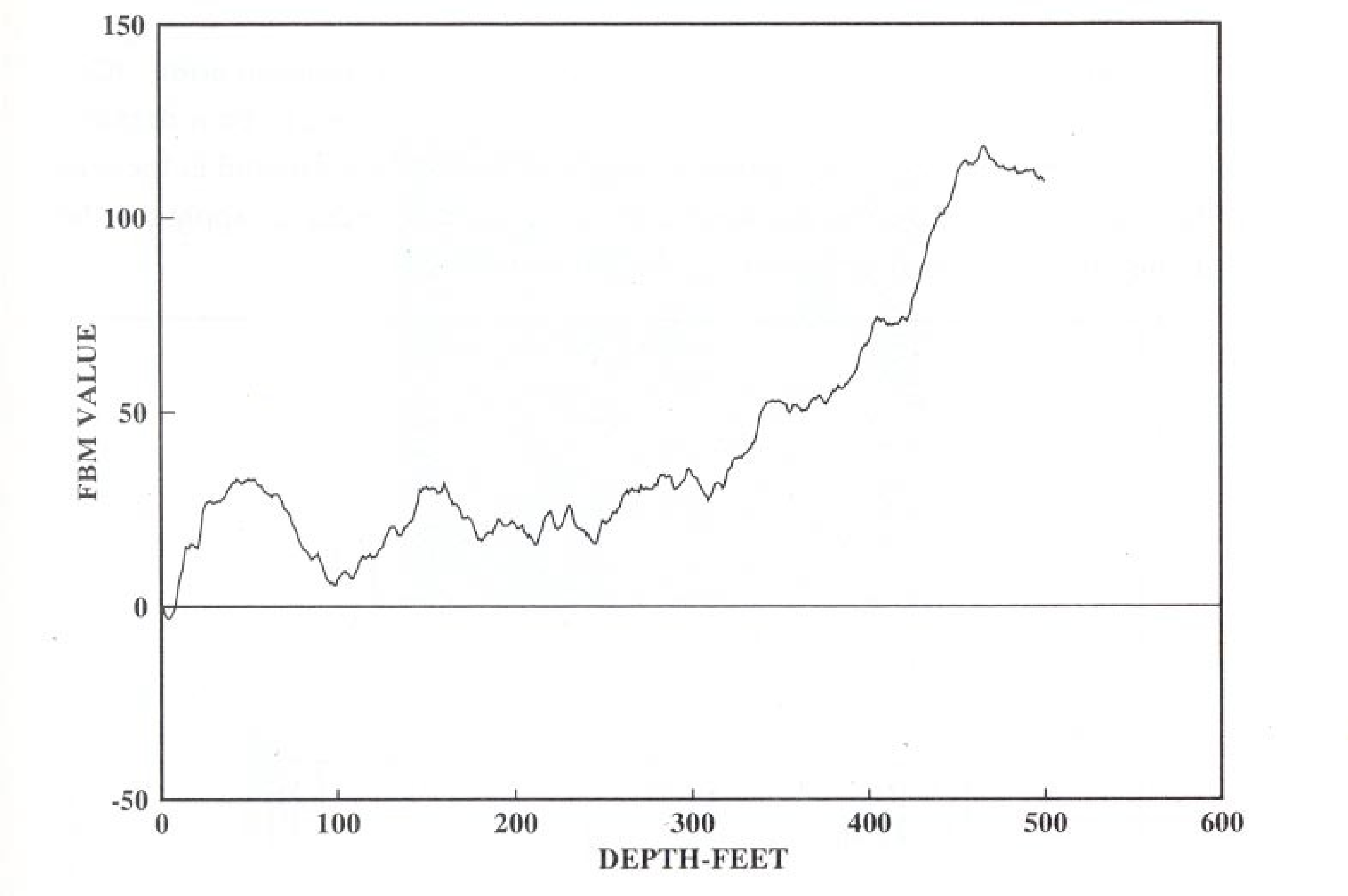
Hay dos tipos de fractales aleatorios que resultan útiles para describir fenómenos naturales:

- El ruido gaussiano fraccional (fractional gaussian noise, **fGn**)
- El movimiento browniano fraccional (fraccional brownian motion, **fBm**).

Ruido Gaussiano Fraccional (**fGn**)



Movimiento Browniano Fraccional (**fBm**)



Co-dimensión Fractal o Exponente de Intermitencia

El parámetro H es conocido como ***co-dimensión fractal*** o ***exponente de intermitencia***. El valor de ***H*** varía entre 0 y 1. Existe una relación entre la dimensión fractal ***D*** (Hausdorff-Besicovitch) y el exponente de intermitencia ***H*** dada por la expresión:

$$D = d - H$$

d- es la dimensión euclidiana.

Para ***H<0.5*** el comportamiento es antipersistente, es decir, es más probable que a un valor bajo le siga uno alto y viceversa.

Para ***H=0*** el comportamiento es completamente aleatorio.

Para ***H>0.5*** el comportamiento es persistente, es decir, es mas probable que a un valor bajo le siga uno bajo y viceversa.

Modelos de variogramas

Ambos fGn y fBm se encuentran relacionados entre sí, y pueden ser descritos por modelos de variogramas.

Para el **fGn** el variograma que lo describe esta dado por:

$$\gamma(\underline{h}) = ½ V_H \delta^{2H-2} \left[2 - \left(|\underline{h}|/\delta + 1 \right)^{2H} + 2|\underline{h}/\delta|^{2H} - \left(|\underline{h}|/\delta - 1 \right)^{2H} \right]$$

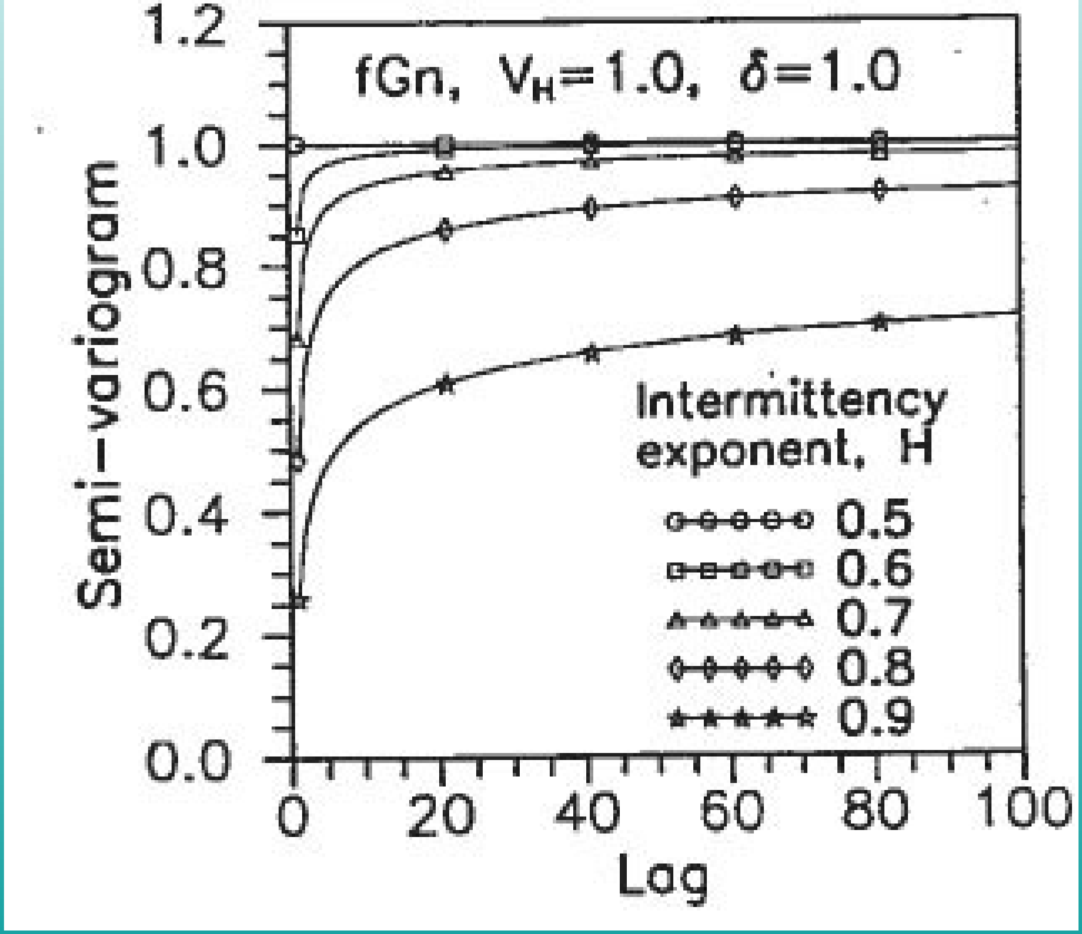
En el caso del **fBm** el variograma que lo modela es:

$$\gamma(\underline{h}) = V_H \underline{h}^{2H}$$

donde V_H es una constante de escala, ***H*** es el exponente de intermitencia y δ es el volumen de la muestra (soporte).

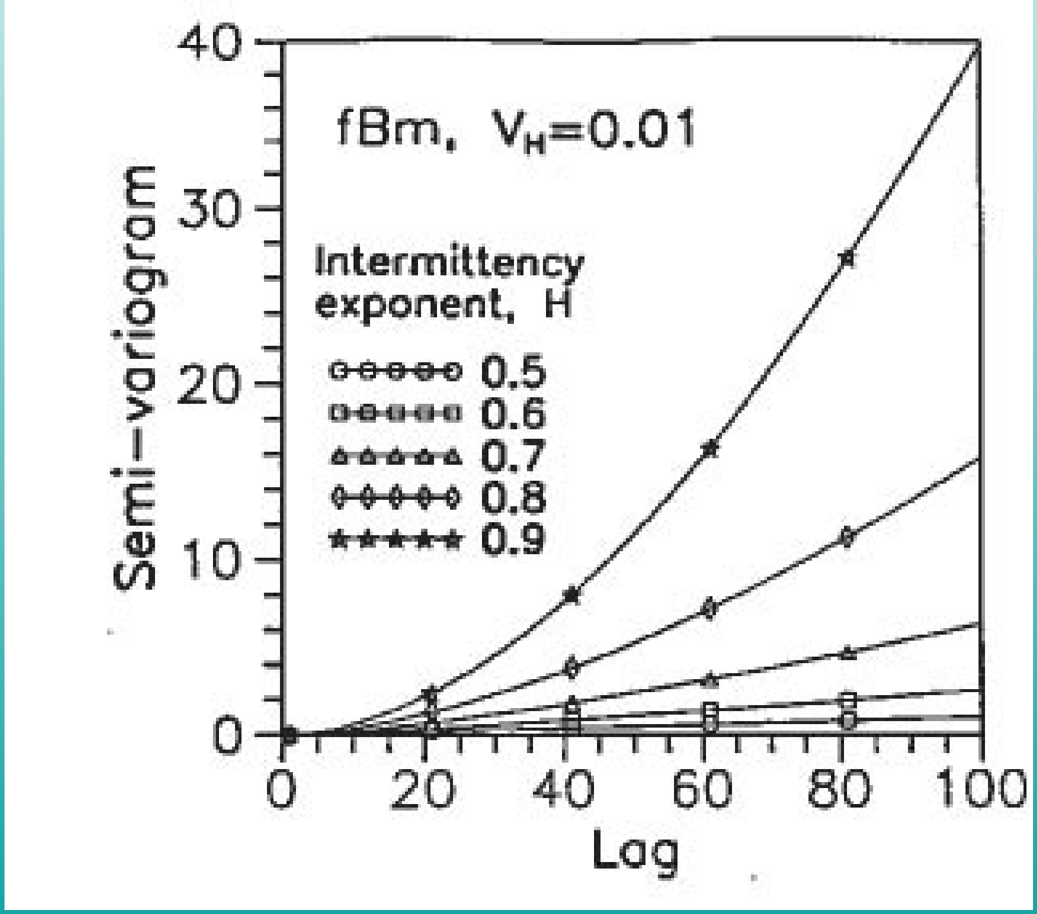
Modelo de variograma para el fGn

Se muestra un ejemplo de variogramas del fGn para diferentes valores de H.



Modelo de variograma para el fBm

Se muestra un ejemplo de variogramas del fBm para diferentes valores de H.



Análisis espacial para una distribución fractal

El análisis espacial para una distribución fractal es muy similar al análisis geoestadístico convencional.

Primero debe asumirse que la muestra puede ser descrita por una distribución fractal, además de que se requiere que los datos se encuentren regularmente espaciados y de que exista masa estadística.

El objetivo del análisis espacial de las muestras es estimar el exponente de intermitencia H, y definir si la muestra presenta características de ruido gaussiano (fGn) o de movimiento browniano (fBm).

Métodos de Estimación del Exponente de Intermitencia H

- Análisis de Rango Rescalado (R/S)
- Método de conteo de cajas (Box Counting)
- Análisis de densidad espectral
- Análisis variográfico

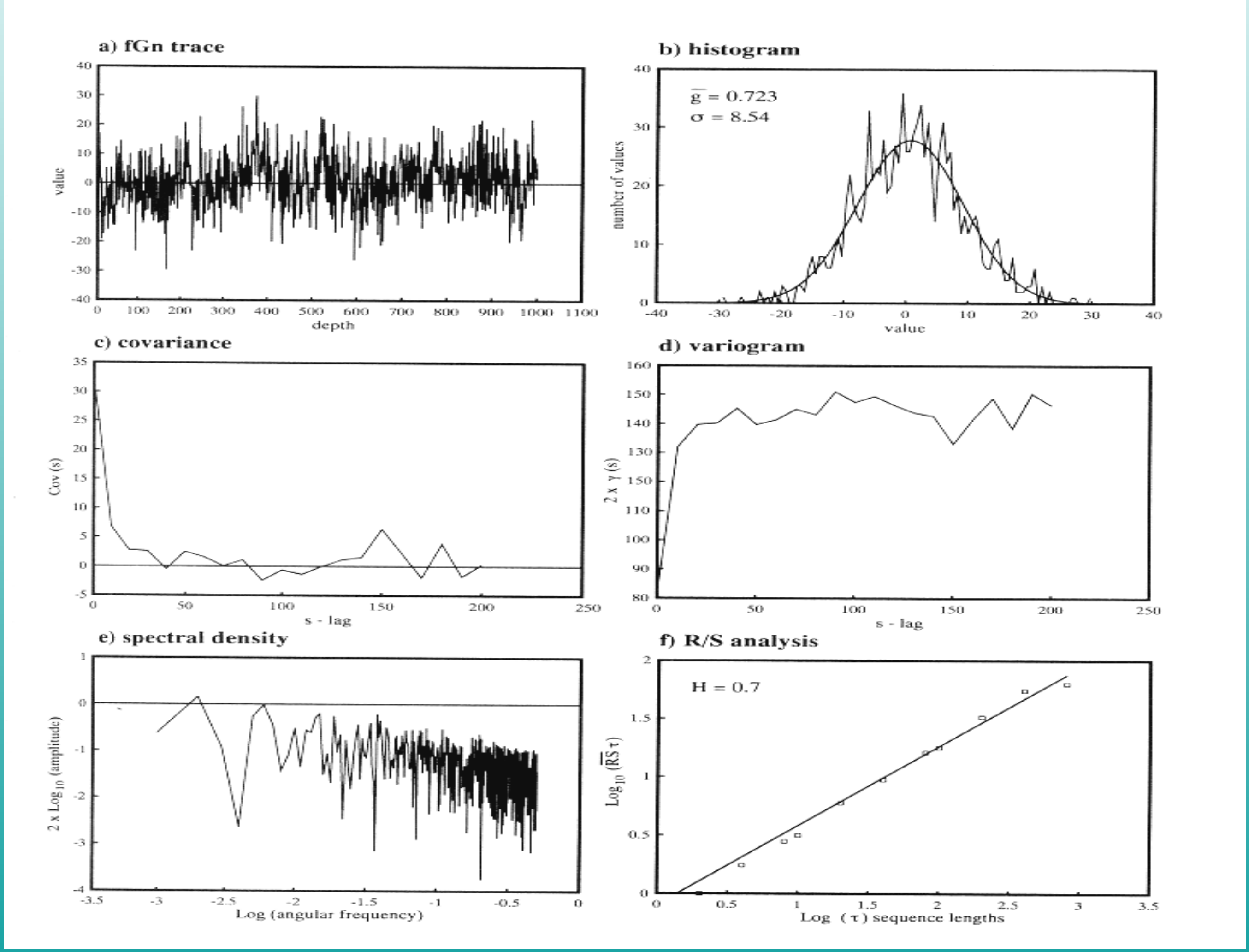
Simulación Condicional Fractal

Una vez que los parámetros fractales fueron determinados, se puede aplicar alguna técnica de simulación condicional con el fin de generar modelos equiprobables que describan un yacimiento.

Cualquier técnica que implique el procedimiento kriging puede ser implementada para describir las características fractales modeladas por medio de los variogramas.

Varios métodos se sugieren en la literatura, siendo los más comunes la transformada de Fourier y la adición sucesiva aleatoria entre otros.

Datos con características de ruido gaussiano fraccional (fGn)



Datos con características de movimiento browniano fraccional (fBm)