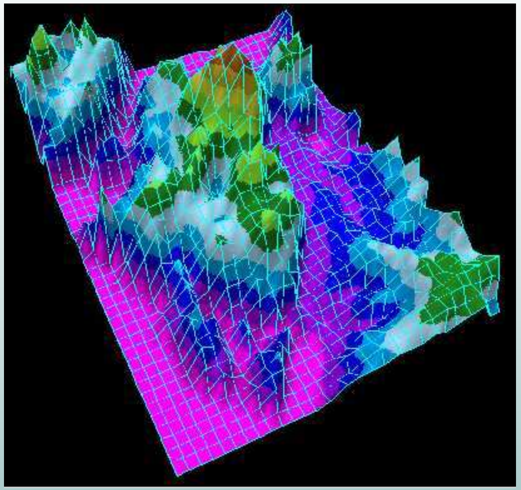
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO



GEOESTADÍSTICA APLICADA

Tema: Estimación Espacial

Instructores:

Dr. Martín A. Díaz Viera (*mdiazv@imp.mx*)

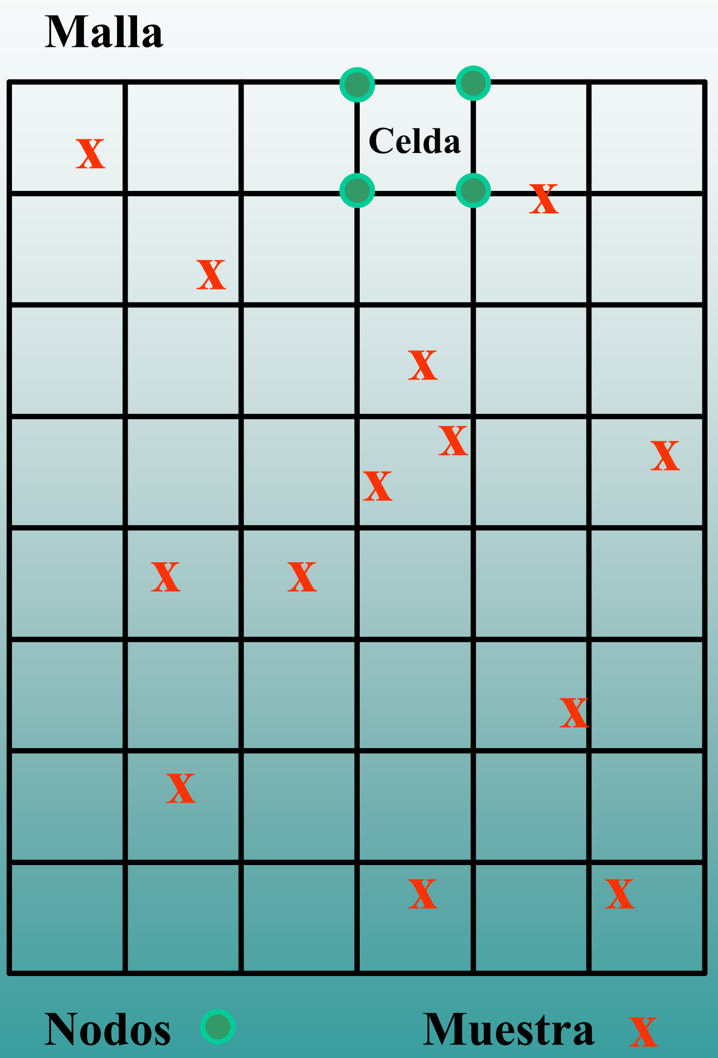
Dr. Ricardo Casar González (*rcasar@imp.mx*)

2009

Contenido

- Introducción
- Ecuaciones del Kriging
- Clasificación del Kriging
- Tipos de Kriging lineal más usuales
- Kriging Simple
- Kriging Ordinario
- Kriging Universal
- Kriging Residual
- Kriging Indicador
- Aspectos prácticos del Kriging

Introducción



Problema: A partir de información conocida de una propiedad, medida en ciertas ubicaciones, estimar el valor en localizaciones en donde se desconoce o se carece de muestreo, usualmente en una malla.

En geoestadística el método de estimación espacial que se usa es el ***Kriging***

Introducción

- El ***Kriging*** es un término que ha sido acuñado para designar al "***mejor estimador lineal insesgado***" (BLUE, en inglés).
- Esta es una técnica de estimación espacial desarrollada por G. Matheron en los sesentas a partir de los trabajos de D. G. Krige quién fue pionero en el uso de la correlación espacial para propósitos de predicción.
- Matheron le asigna el nombre de ***Kriging*** en honor a Krige.

Introducción

- El estimador ***Kriging*** se considera ***óptimo*** ya que:

1. Es insesgado, es decir, el valor esperado del error es cero.
2. Garantiza la mínima varianza de la estimación, es decir, reduce al mínimo la varianza del error de la estimación.

Ecuaciones del Kriging

B L U E

- Estimador $\rightarrow$ $\boxed{Z_0^*}$
- Mejor $\rightarrow$ $\boxed{\min\left\{Var\left[Z_0 - Z_0^*\right]\right\}}$
- Lineal $\rightarrow$ $\boxed{Z_0^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Z_i}$
- Insesgado $\rightarrow$ $\boxed{E\left[Z_0^*\right] = E\left[Z_0\right]}$

Ecuaciones del Kriging

- Dada una FA estacionaria de segundo orden y definida en ciertos puntos $\{Z(\underline{x}_i),\ i=1,\ldots,n\}$
- Valor esperado $\boxed{E\left[Z(\underline{x})\right]=m; \quad \forall \underline{x}}$
- Función de covarianzas

$$\boxed{C(\underline{h})=E\left[Z(\underline{x}+\underline{h})Z(\underline{x})\right]-m^2}$$

- Variograma

$$\boxed{\gamma(\underline{h})=1/2\,Var\left[Z(\underline{x}+\underline{h})-Z(\underline{x})\right]}$$

Ecuaciones del Kriging

- Condición de insesgadez (valor esperado del error igual a cero)

$$E\left[Z^*\left(\underline{x}_k\right)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z\left(\underline{x}_i\right)\right] = E\left[Z\left(\underline{x}_k\right)\right] = m$$

- Esto implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{E\left[Z\left(\underline{x}_i\right)\right]}_{m} = m$$

- Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i m = m \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Ecuaciones del Kriging

- Condición de que la varianza del error sea mínima
- La varianza de la estimación se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma_e^2 = Var\left[Z_k - Z_k^* \right] = E\left[\left(Z_k - Z_k^* \right)^2 \right]$$

- Entonces, para satisfacer la condición de insesgadez hay que minimizar la siguiente función objetivo:

$$F = \sigma_e^2 - 2\mu \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1 \right)$$

μ - un multiplicador de Lagrange

Ecuaciones del Kriging

- Derivando a F respecto a λ_i y μ resulta el sistema de ecuaciones del Kriging:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = -2\sigma_{ki} + 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{ij} - 2\mu = 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1 = 0 \end{cases}$$

donde $\sigma_{ij} = C\left(\underline{x}_i, \underline{x}_j\right) - \text{covarianza}$

Ecuaciones del Kriging

- Finalmente se escribe como:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{ij} - \mu = \sigma_{ki}, \quad i = 1,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Varianza del error de la estimación

$$\sigma_e^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{ki} + \mu$$

Ecuaciones del Kriging

- En forma matricial:

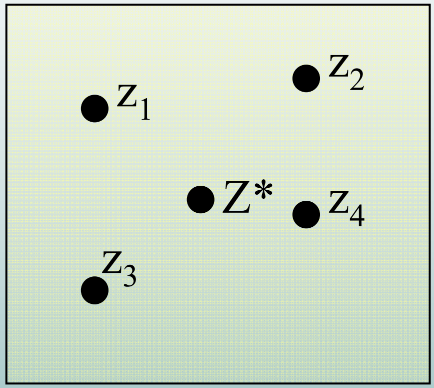
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{k1} \\ \sigma_{k2} \\ \dots \\ \sigma_{kn} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- <u>Observación:</u> bajo la hipótesis intrínseca las covarianzas pueden ser reemplazadas por las semivarianzas $\boxed{\sigma_{ij} = \sigma^2 - \gamma_{ij}}$

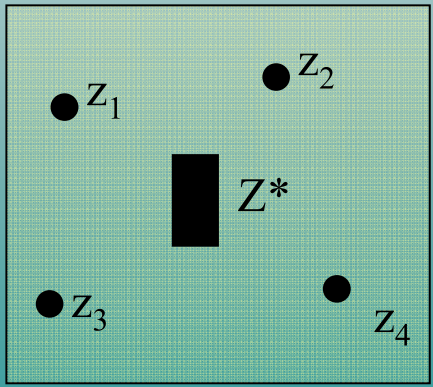
Clasificación del Kriging

- Según el soporte de la medición de los datos

➢ puntual



➢ por bloques



Clasificación del Kriging

- Según la forma del estimador

➢ lineales:

Simple

Ordinario

Universal

Residual

➢ no lineales:

Disyuntivo

Indicador

Probabilístico

Clasificación del Kriging

- Según el supuesto de la distribución de probabilidad

➢ paramétrico:

Multigaussiano

Disyuntivo

Lognormal

➢ no paramétrico:

Simple, Ordinario

Universal, Residual

Indicador

Tipos de Kriging lineales

- Kriging Simple
- Kriging Ordinario
- Kriging Universal
- Kriging Residual

Kriging Simple

- Kriging lineal con valores esperados conocidos

- Requisitos:

✓ Conocer valores esperados de la función aleatoria . $\boxed{m(\underline{x}_i) = E\left[Z\left(\underline{x}_i\right)\right],\ \forall i = 0,\ldots,n}$

✓ Conocer la función de covarianzas de la función aleatoria . $\boxed{\sigma_{ij}}$

Kriging Simple

- Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma'_{ij} = \sigma'_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n \\ \lambda_0 = m(\underline{x}_0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m(\underline{x}_i) \end{cases}$$

- Estimador: $Z_0^* = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(\underline{x}_i)$

- Varianza de la estimación: $\sigma_{K_S}^2 = \sigma'_{00} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma'_{i0}$

Kriging Ordinario

- Kriging lineal con valor esperado estacionario pero desconocido
- Requisitos:

✓ El valor esperado de la función aleatoria sea constante

$$m(\underline{x}_i) = E\left[Z\left(\underline{x}_i\right)\right] = m,\ \forall i = 1,\ldots,n$$

✓ Conocer la función de covarianzas o el semivariograma de la función aleatoria

$$\sigma_{ij}\ ,\ \gamma_{ij}$$

Kriging Ordinario

- Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{ij} - \mu = \sigma_{0i}, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

- Estimador: $$Z_0^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i)$$

- Varianza de la estimación: $$\sigma_{K_O}^2 = \sigma_{00} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{i0} + \mu$$

Kriging Universal

- Kriging lineal en presencia de tendencia
- Requisitos:

✓ Conocer la forma de la tendencia expresada usualmente mediante polinomios.

$$m(\underline{x}) = E\left[Z(\underline{x})\right] = \sum_{l} a_l \phi_l(\underline{x})$$

✓ Conocer la función de covarianzas o el semivariograma de la función aleatoria sin tendencia, es decir

$$\sigma_{ij} \ , \ \gamma_{ij} \ \text{para} \ \left\{Z(\underline{x}) - m(\underline{x})\right\}$$

Kriging Universal

- Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_{ij} - \sum_{l=1}^{L} \mu_l \phi_l\left(\underline{x}_i\right) = \sigma_{0i}, \quad i = 1,\ldots,n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_l\left(\underline{x}_i\right) = \phi_l\left(\underline{x}_0\right), \quad l = 1,\ldots,L \end{cases}$$

- Estimador: $\boxed{Z_0^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z\left(\underline{x}_i\right)}$

- Varianza del error: $\boxed{\sigma_{K_U}^2 = \sigma_{00} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{i0} + \sum_{l=1}^{L} \mu_l \phi_l\left(\underline{x}_0\right)}$

Kriging Universal

- Dificultades prácticas

- ➢ El orden del polinomio que mejor describe o explica la tendencia $m(\underline{x})$ nunca es conocido, hay que adivinarlo.

- ➢ El variograma tampoco es conocido y hay que estimarlo a partir de los residuales $R(\underline{x})$ (datos –deriva)

Kriging Residual

- ***Kriging Residual*** fue propuesto por Gambolati y Volpi (1978 y 1979).
- Es una alternativa para manejar la no estacionaridad.
- El modelo consiste $$\boxed{Z(\underline{x}) = m(\underline{x}) + R(\underline{x})}$$

  donde $m(\underline{x})$ - tendencia, $R(\underline{x})$ - residuos
- La deriva o tendencia $m(\underline{x})$ se estima usando mínimos cuadrados ordinarios
- A los residuos $R(\underline{x})$ sin tendencia se les aplica el *Kriging Ordinario*.

Kriging Residual

- El algoritmo se puede resumir en los siguientes pasos:

- Obtener el orden *k* del polinomio que mejor representa a la deriva o tendencia.
- Ajustar la deriva mediante MCO $\boxed{m_k^*(\underline{x})}$
- Calcular los residuos $\boxed{R(\underline{x}) = Z(\underline{x}) - m_k^*(\underline{x})}$
- Estimar y modelar el semivariograma de los residuos.
- Aplicar kriging ordinario a los residuos usando el semivariograma obtenido.
- Se obtiene la estimación en un punto no observado como

$$\boxed{Z^*(\underline{x}) = m_k^*(\underline{x}) + R^*(\underline{x})}$$

Kriging Indicador

Función Indicador de una FA

z_c- *valor de corte*

$$I(\underline{x}, z_c) = \begin{cases} 1, & si \quad Z(\underline{x}) \le z_c \\ 0, & si \quad Z(\underline{x}) > z_c \end{cases}$$

La distribución espacial

$$\Phi\left(A, z_c\right) = \frac{1}{A} \int_{\underline{x} \in A} I\left(\underline{x}, z_c\right) d\,\underline{x}$$

$$E\left[\Phi(A, z_c)\right] = \frac{1}{A} E\left[\int_{\underline{x} \in A} I(\underline{x}, z_c) d\,\underline{x}\right] = \frac{1}{A} \int_{\underline{x} \in A} E\left[I(\underline{x}, z_c)\right] d\,\underline{x}$$

$$E\left[\Phi(A, z_c)\right] = \frac{1}{A} \int_{\underline{x} \in A} \left\{(1)\Pr\left[Z(\underline{x}) \le z_c\right] + (0)\Pr\left[Z(\underline{x}) > z_c\right]\right\} d\,\underline{x}$$

F. de distribución de *Z*

$$E\left[\Phi(A, z_c)\right] = \Pr\left[Z(\underline{x}) \le z_c\right] = F_Z(z_c)$$

Kriging Indicador

- La distribución de probabilidad de variables indicador es una distribución de Bernoulli y sus momentos están dados por:

a) Valor esperado $E\left[I(\underline{x}, z_c)\right] = F_Z(z_c)$

b) Fun. de covarianzas $C_I\left(\underline{h}, z_c\right) = F_{\underline{x},\underline{x}+\underline{h}}\left(z_c, z_c\right) - \left\{F_Z\left(z_c\right)\right\}^2$

c) Varianza $Var\left[I(\underline{x}, z_c)\right] = F_Z(z_c)\left[1 - F_Z(z_c)\right]$

d) Fun. de semivarianzas $\gamma_I\left(\underline{h}, z_c\right) = F_Z(z_c) - F_{\underline{x},\underline{x}+\underline{h}}\left(z_c, z_c\right)$

Kriging Indicador

- Variograma Indicador
- Se estiman para cada valor de corte y son menos sensibles a la presencia de valores extremos (*outliers*)

a) El variograma indicador siempre alcanza una meseta

$$S(z_c) = C_I(\underline{0}, z_c)$$

b) $S(z_c)$ es una función creciente en $(-\infty, z_M)$,

c) $S(z_c)$ es una función decreciente en (z_M, ∞),

(donde z_M - es la mediana)

d) Una vez conocida la meseta $S(z_c)$ del variograma se puede calcular la función de probabilidad acumulativa:

$$F_Z\left(z_c\right) = 0.5 + signo\left(z_c - z_M\right)\sqrt{0.25 - S(z_c)}$$

Kriging Indicador

- Uno de los propósitos de usar la variable indicador es para estimar la función de probabilidad acumulativa.
- Las funciones de probabilidad estimadas se obtienen mediante combinaciones lineales de la función indicador.
- Esta función es la proporción exacta de valores menores que el valor de corte de una variable, dentro de un área A.
- El valor estimado mediante kriging indicador representa la probabilidad de que el valor estimado de la función aleatoria sea menor que el valor de corte $\left(Z(\underline{x}) \leq z_c \right)$.
- El Kriging indicador genera un mapa por cada valor de corte (categoría indicador), en donde se muestran regiones con diferente probabilidad de ocurrencia para dicho valor de corte (categoría indicador).

Kriging Indicador

- La forma del estimador $\phi^*(A, z_c) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha(z_c) i(x_\alpha, z_c)$

  con la condición para el no sesgo $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha(z_c) = 1$
- El ***kriging simple*** puede ser aplicado para hallar los pesos usando las variables indicador y el variograma indicador.
- Las ecuaciones del Kriging indicador se resuelven en la práctica para un número finito, usualmente menor que 10, de valores de corte .
- Si la estimación de cada valor de se realiza por separado no se puede garantizar que se cumplan las relaciones de orden de una función de distribución válida.

Kriging Indicador

- Alternativas (Myers, 1984)

1. Resolver el sistema de ecuaciones para el valor de corte correspondiente a la mediana ($z_c = z_M$) y luego utilizar los mismos pesos obtenidos en el kriging para otros valores de corte z_c.

2. Utilizar *Cokriging Indicador*, es decir el estimado se obtiene a partir de los indicadores $i(x_\alpha, z_\beta)$, α=1,…,n y β=1,…, N. Esta alternativa es más exacta pero a la vez es más costosa en cuanto a cómputo.

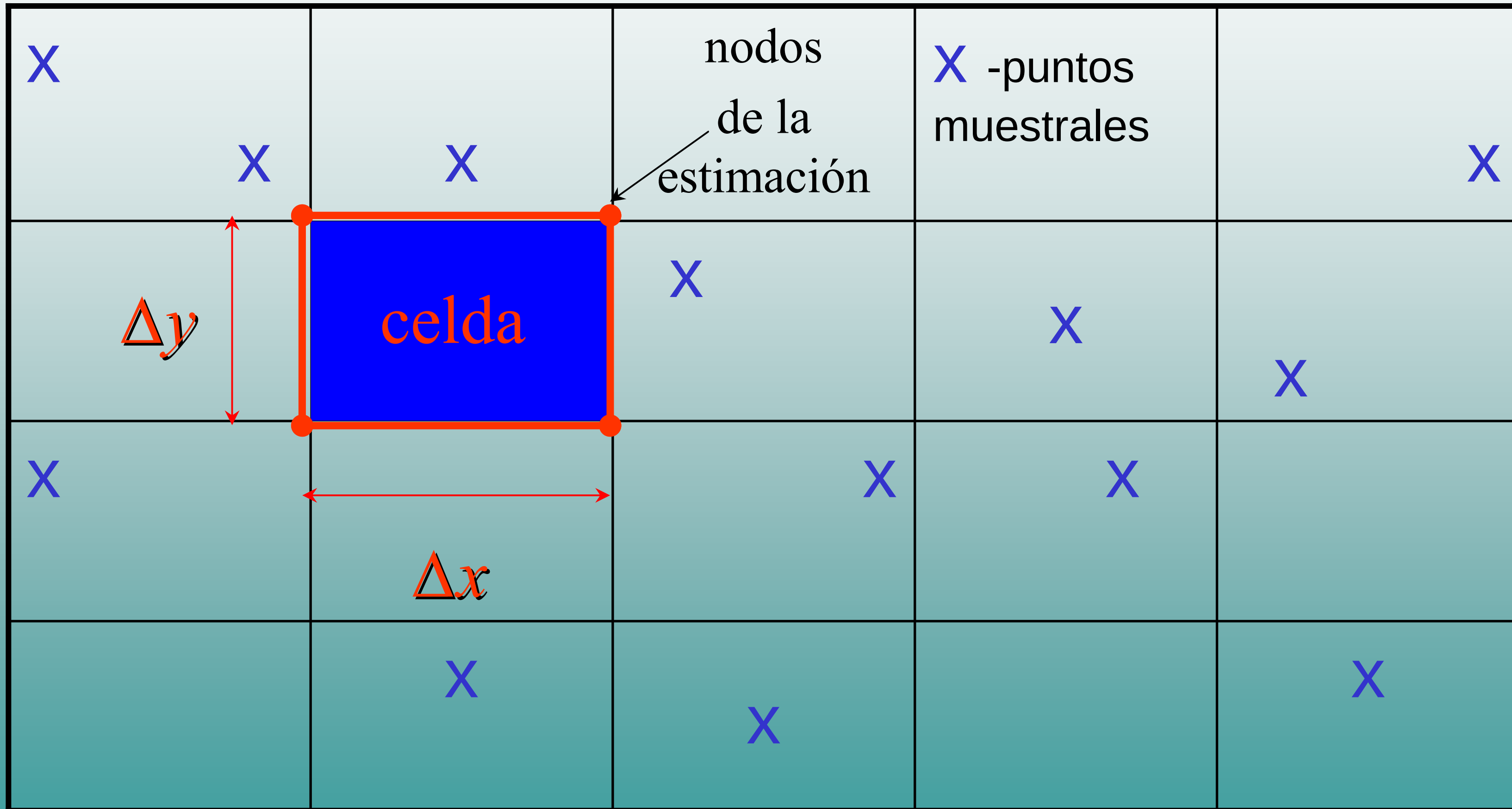
Aspectos prácticos del Kriging

1.- Definir una ***malla de estimación***:

- Si bien no hay restricciones para la malla de estimación usualmente se eligen mallas regulares debido a que su geometría facilita la representación gráfica de los resultados en forma de mapas de contornos, relieves, etc.
- Una recomendación práctica respecto al tamaño de la celda de la malla es que debe ser de un orden aproximadamente igual a la distancia mínima de separación de los datos, puesto que ésta es la resolución de la información que se dispone.

Aspectos prácticos del Kriging

Ejemplo de malla de estimación rectangular:



Aspectos prácticos del Kriging

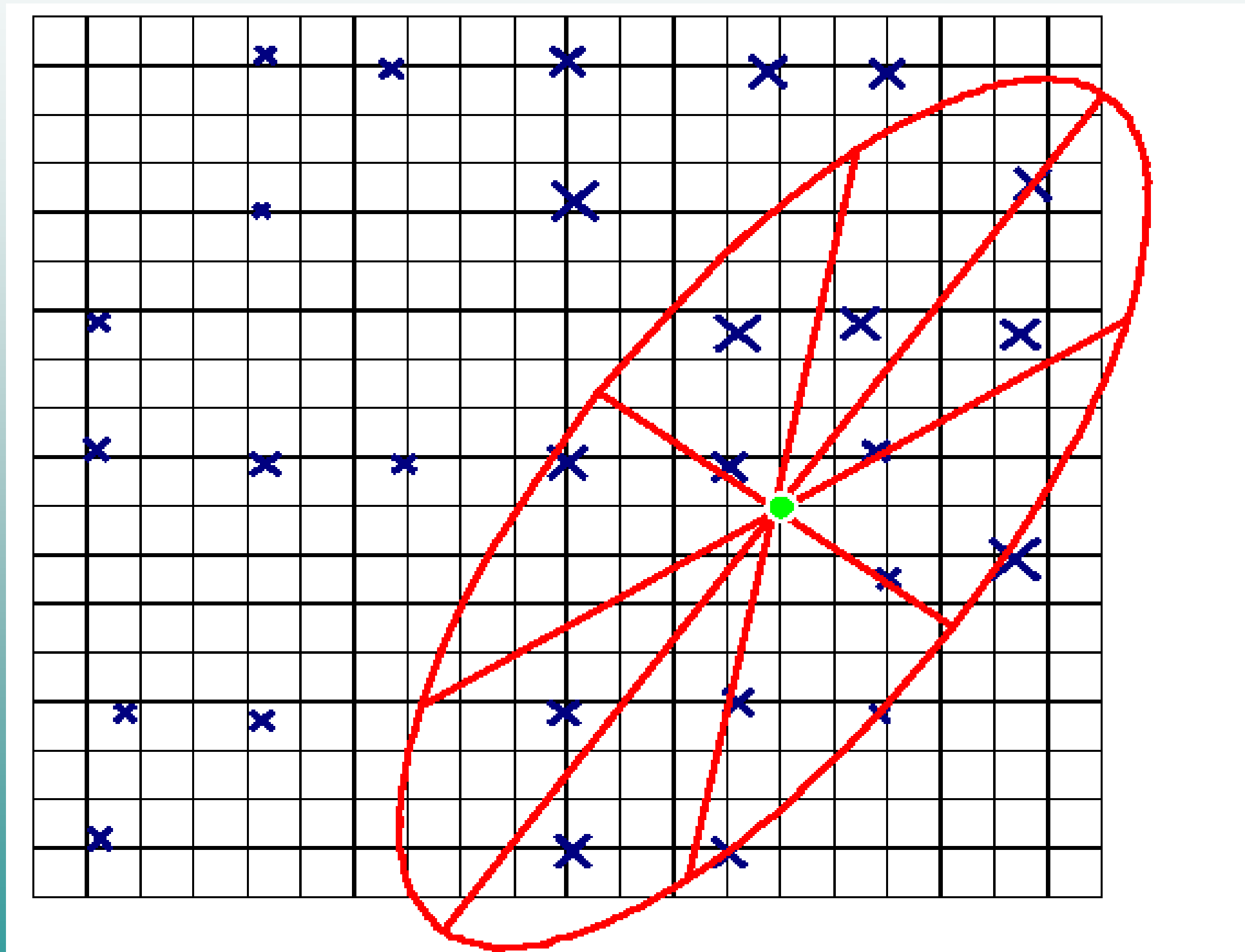
2.- Definir una ***vecindad de búsqueda***:

La vecindad de búsqueda se define con respecto al punto a estimar y determina cuales puntos vecinos potencialmente serán tomados en la estimación.

- <u>Caso isotrópico:</u> tomar una circunferencia con centro en el punto a estimar y radio igual o menor al alcance del variograma.
- <u>Caso anisotrópico:</u> tomar una elipse con centro en el punto a estimar y semiejes iguales o menores a los alcances del variograma anisotrópico.

Aspectos prácticos del Kriging

Ejemplo de vecindad de búsqueda para el caso anisotrópico



Radio de búsqueda:

- Igual al rango
- Mayor que el rango no tiene sentido, ya no existe correlación

Aspectos prácticos del Kriging

3.- Definir ***cantidad de puntos*** de la estimación:

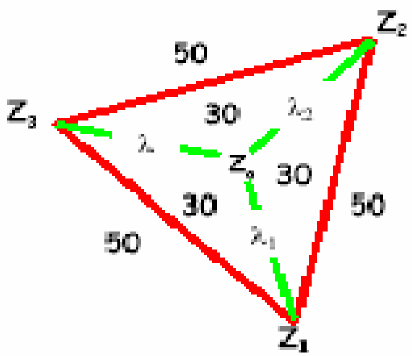
Una vez definida la vecindad de búsqueda hay que especificar cuantos puntos intervendrán en la estimación. Esto determina el tamaño de la matriz del Kriging.

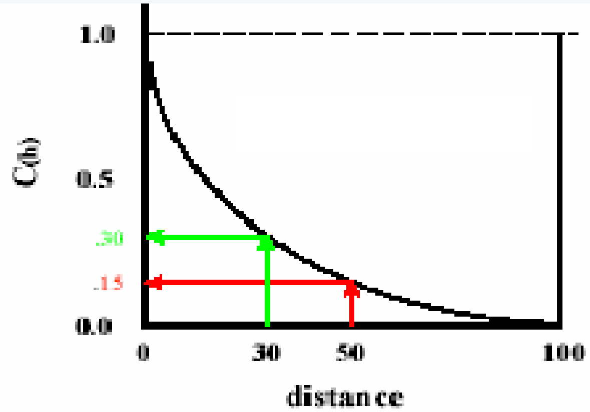
Para toda la vecindad se pueden tomar como valores prácticos:

- <u>Mínimo de puntos:</u> entre 4 y 6 puntos.
- <u>Máximo de puntos:</u> entre 10 y 25 puntos.

También se pueden establecer cantidades min. y máx. por cuadrante, octante, etc.

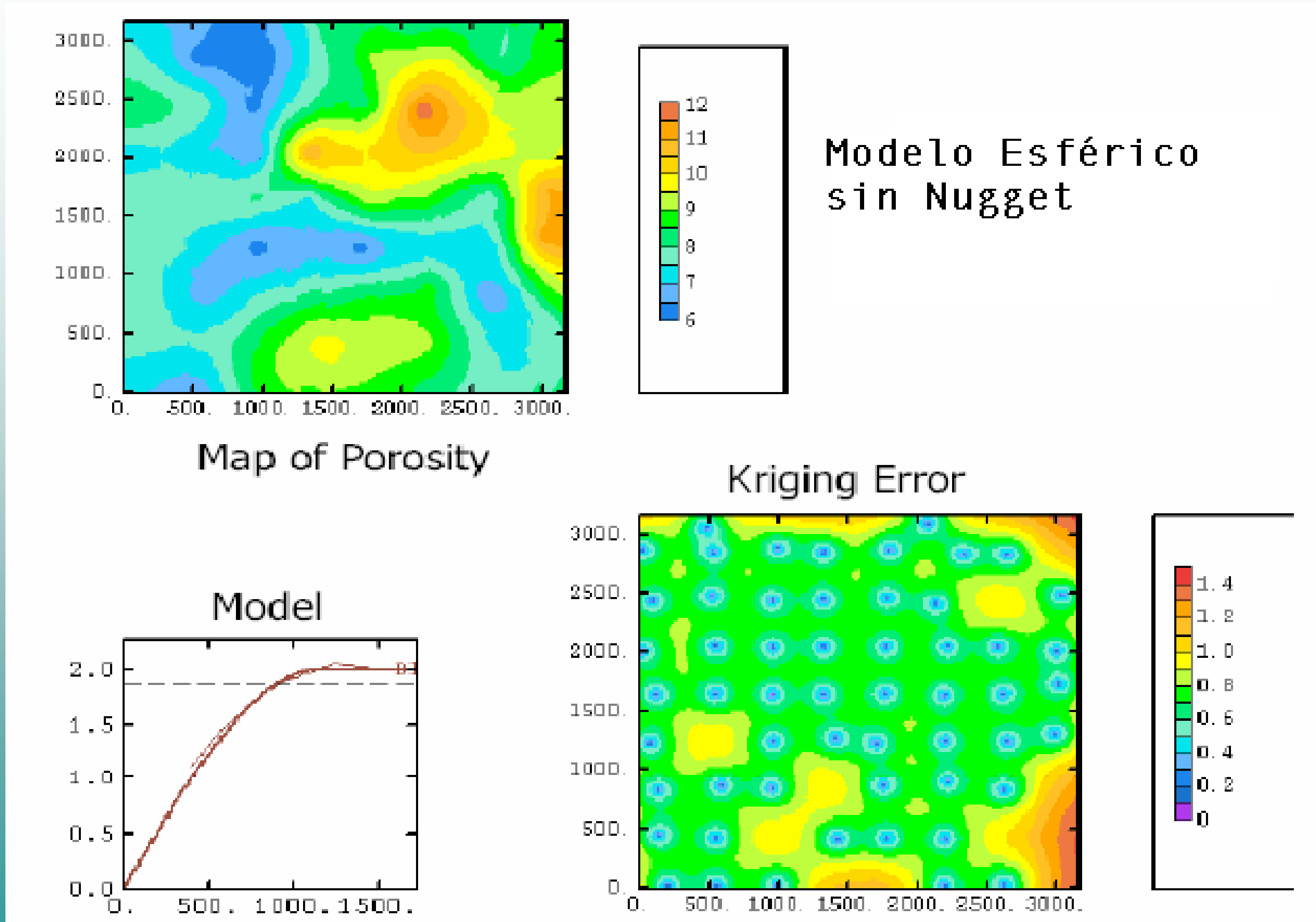
Aspectos prácticos del Kriging



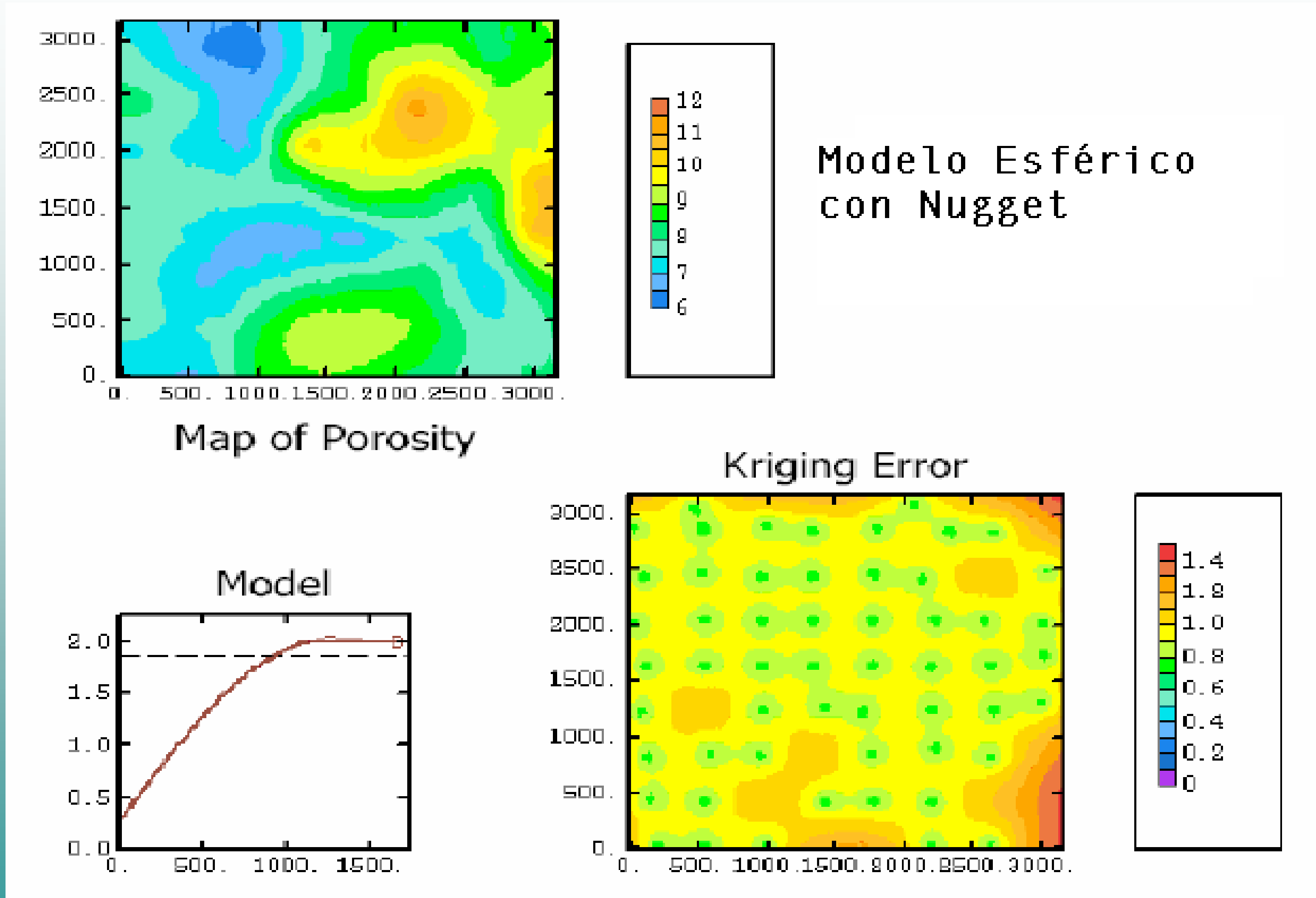


$$\begin{bmatrix} 1.0 & .15 & .15 & 1 \\ .15 & 1.0 & .15 & 1 \\ .15 & .15 & 1.0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .30 \\ .30 \\ .30 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aspectos prácticos del Kriging

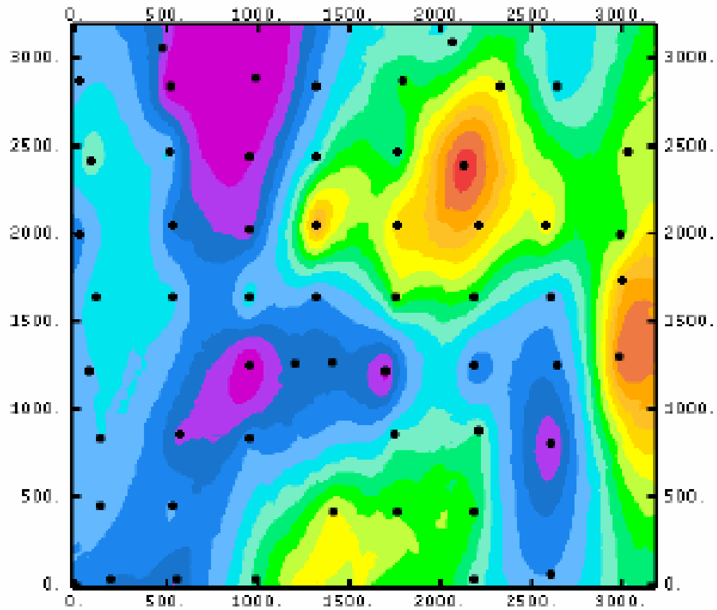


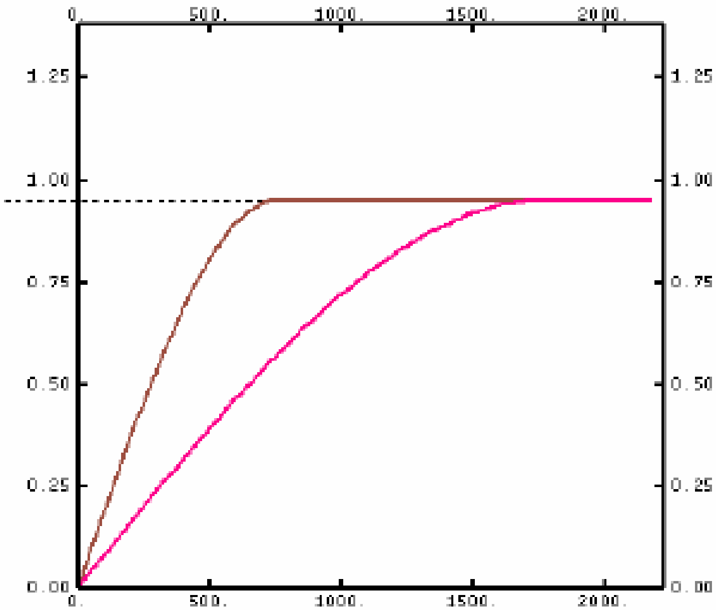
Aspectos prácticos del Kriging

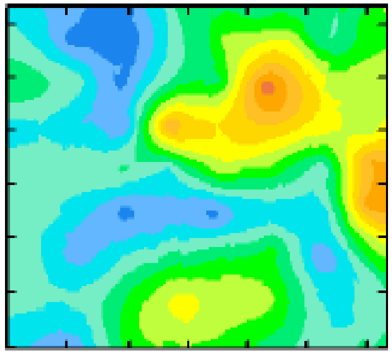


Aspectos prácticos del Kriging

Modelo Esférico Anisotrópico



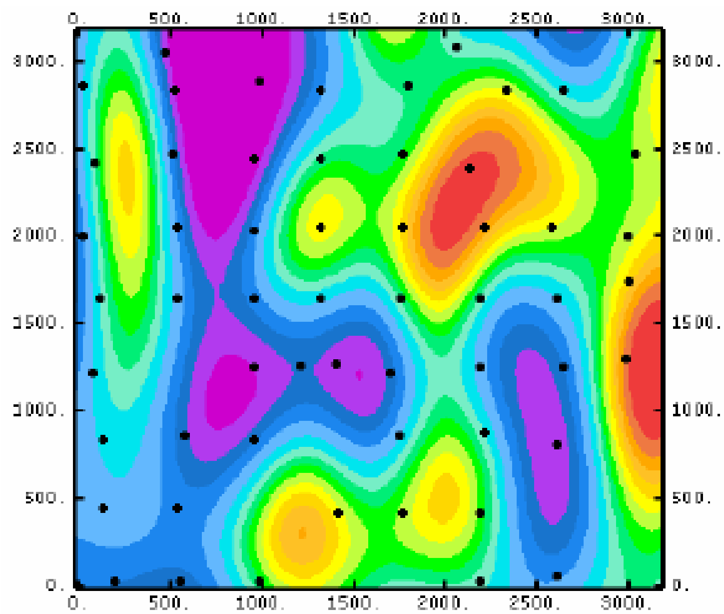


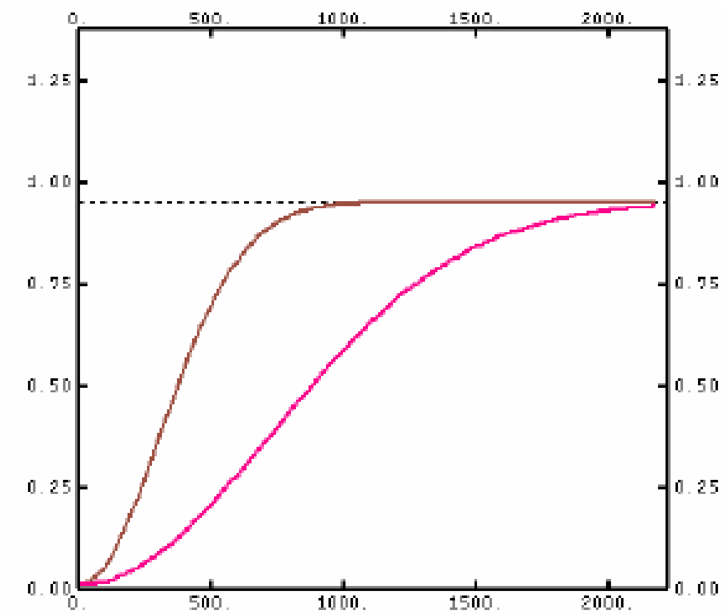


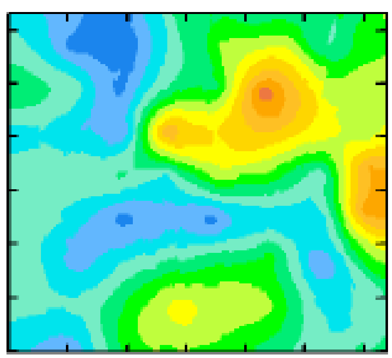
Modelo Esférico
sin nugget

Aspectos prácticos del Kriging

Modelo Gaussiano Anisotrópico



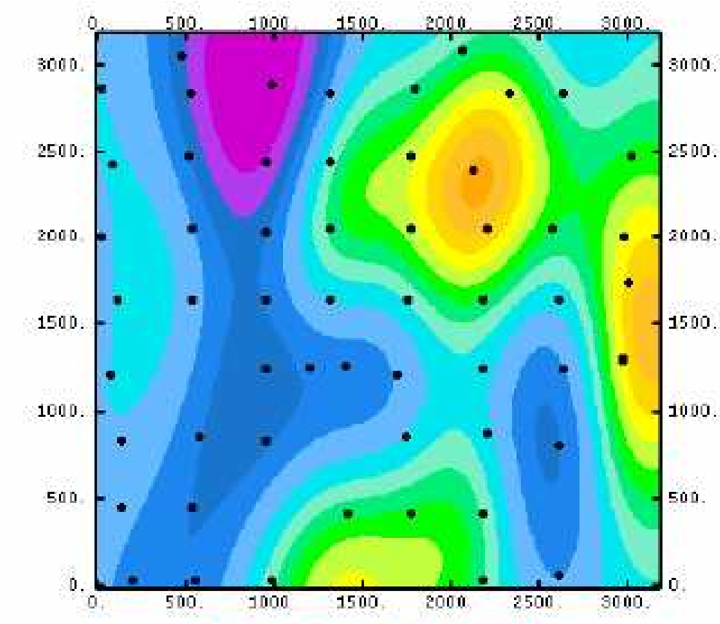


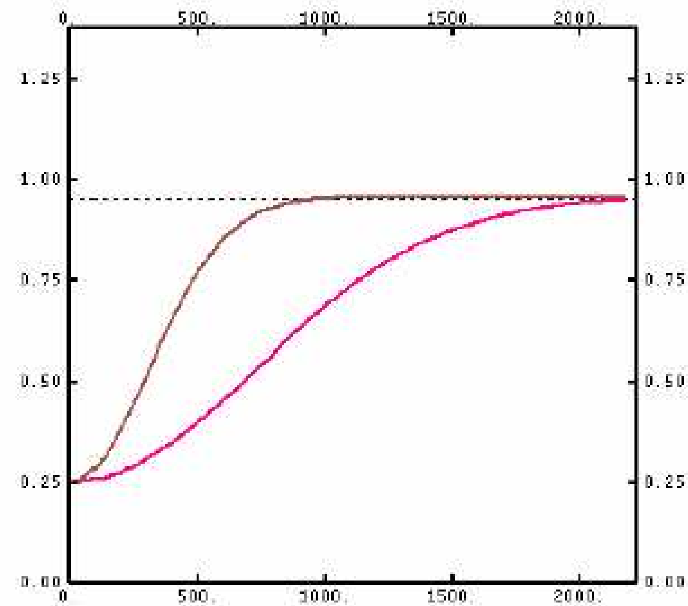


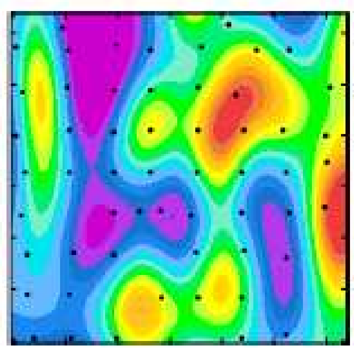
Modelo Esférico
isotrópico

Aspectos prácticos del Kriging

Modelo Gaussiano Anisotrópico con Nugget







Modelo Gaussiano Anisotrópico sin Nugget

Características del estimador Kriging

- Es un interpolador “exacto”
- Incorpora el modelo de variabilidad espacial (obtenido mediante el análisis estructural o variográfico).
- Proporciona una medida de la precisión de la estimación mediante la varianza de estimación.
- La varianza de estimación tiene aplicaciones: diseño de muestreo.
- La precisión depende de varios factores: del número de muestras, su localización, la distancia entre las muestras y el punto o bloque a estimar, de la calidad del modelo de variación espacial (variograma).